International Mathematical Forum, 2, 2007, no. 66, 3269 - 3272

Erratum on Structure of Inseparable Extensions

Mustapha Chellali

Département de mathématiques, Faculté des sciences
Université Mohammed 1, Oujda, Maroc
chellali@sciences.univ-oujda.ac.ma

Résumé. Dans son article "Structure of inseparable extensions" (cf. [2]), l'auteur affirme dans la page 407, lemme 5, (2), que si L/k est une extension de corps commutatifs ; K un corps intermédiaire de L/k séparable sur k ; alors L/k est modulaire si et seulement si L/K est modulaire. la preuve basée sur le point (3) du lemme 4 de la même page utilise un faut argument sur les diagrammes de corps linéairement disjoints. Nous précisons cette faute et nous donnons un contre-exemple explicite à l'affirmation ci dessus.

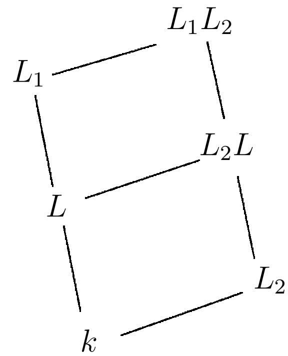
Mathematics Subject Classification: 12F15

Soit k un corps commutatif de caractéristique $p \neq 0$. Une extension L/k de corps commutatifs quelconque est dite modulaire si pour tout entier n, L^{p^n} et k sont linéairement disjoints (automatiquement sur leur intersection). La linéarité disjointe vérifie une forme de tansitivité bien connue [1], à savoir :

Soient L_1/k et L_2/k des sous extensions d'une extension Ω/k. Soit K un corps intermédiaire de L_1/k . Il est equivalent de dire :

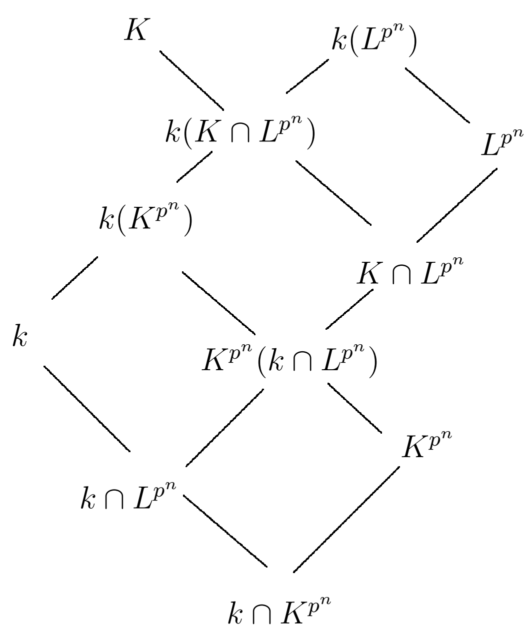
1. L_1 et L_2 sont k-linéairement disjoints

2. $\begin{cases} L \text{ et } L_2 \text{ sont } k\text{-linéairement disjoints} \\ L_2L \text{ et } L_1 \text{ sont } L\text{-linéairement disjoints} \end{cases}$



Soit maintenant K un corps intermédiaire d'une extension L/k. On a le diagramme de corsp commutatifs ci-dessous. Ce diagramme que l'on peut appeler diagramme de Jacobsan (cf. [1]), vérifie les conventions suivantes :

- Si on monte vers le haut (de la page), cela sous entend une extension de corps commutatifs.
- Chaque noeud ayant deux fils est le produit de ces deux fils.
- Un noeud ayant deux pères n'est pas necceserement l'intersection de ces deux pères.



Dans [2], l'auteur applique la transitivité au diagramme de Jacobson ci dessus ; et obtient l'énoncé (3) du lemme 4. (cf. [2] page 407) à savoir :

K et kL^{p^n} sont linéairement disjoints pour tout n, K^{p^n} et $L^{p^n} \cap k$ sont linéairement disjoints pour tout n et L/k modulaire si et seulement si $K \cap L^{p^n}$ et kK^{p^n} sont linéairement disjoints pour tout n et L/K modulaire et K/k modulaire.

Cet énoncé est cependant faux car on ne précise pas sur quels corps de base ($k(K \cap L^{p^n})$, $K^{p^n}(k \cap L^{p^n})$ et $k \cap K^{p^n}$) la linéarité disjointe a lieu. Il en resulte que contrairement à l'affirmation de [2] (énoncé (2) du lemme 5. page 407) ; si K/k est séparable et L/K modulaire cela n'entraine pas à priori que L/k est modulaire. Voici un contre-exemple explicite :

Soit P un corps parfait de caractéristique $p \neq 2, 0$. Soient X, Y algébriquement indépendant sur P et $k = P(X, Y)$. Soit $L = k(r)$ et $K = k(r^p)$ où r vérifie :

$$r^{2p} - Xr^p + Y = 0$$

On a :

- K/k séparable (car r^p est racine d'un polynôme séparable)
- L/K est modulaire car purement inséparable et simple.
- L/k est non modulaire car sinon d'aprés le diagramme ci dessus on aura :

$$kK^{p^n} \cap (K \cap L^{p^n}) = K^{p^n}(k \cap L^{p^n})$$

Or K/k séparable entraine $kK^{p^n} = K$. Pour $n \geq 1$ on a $K \cap L^{p^n} = L^{p^n}$. on montrera ci aprés que $k \cap L^{p^n} = k^{p^n}$ pour tout entier n (autrement dit L/k est exceptionnelle). On aura donc

$$L^{p^n} = K^{p^n}$$

Soit $K = L$. Or par le critère d'Eisenstein, le polynôme $T^{2p} - XT^p + Y$ est irréductible sur k. Donc $K \neq L$.

Il reste à montrer que L/k est exceptionnelle. Soit $t \in L$ tel que $t^p \in k$. Posons $M = k(t)$. Si $t \notin k$, on aura $[M : k] \geq p$ donc $[L : M] \leq 2$, donc L/M est normale, donc L/k est normale (car M/k purement inséparable).

Soit σ un k-automorphisme non trivial de L (σ existe car L/k non purement inséparable). r^p et $\sigma(r)^p$ sont alors deux racines distinctes de $T^2 - XT + Y$, donc

$$\begin{cases} (r+\sigma(r))^p & = & X \\ (r\sigma(r))^p & = & Y \end{cases}$$

Donc $k(X^{p^{-1}}, Y^{p^{-1}}) \subset L$, donc $[L : k] = 2p \geq p^2$, contradiction.

References

[1] N. Jacobson, Lecture in Abstract Algebra, vol III, the University series,Van Nostrand, Princeton, 1964.

[2] M.E Sweedler, *Structure of inseparable extensions*, Ann. Math. (2) (1968) 87, 401-410.

Received: July 30, 2006