Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 5, 2010, no. 17, 823 - 842

L'opérateur de Dirac et l'algèbre de Clifford en analyse harmonique

Mohamed BEN AMMAR

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieur de Nabeul
El Mrazka 8000, Hammamet, Tunisie
mohamed.benammar@ipein.rnu.tn

Abstract

We first obtain an extension of the local expression of the Dirac operator D with the help of the spinor representation and we determine spinor morphisms linked to D. Next we plan to obtain a decomposition of the algebra in n variables of polynomials with coefficients in the Clifford algebra and to deduce the decomposition of the algebra of harmonic spinor polynomials with respect to the Dirac operator. Finally, we plan to use the integral representation of the Dirac operator in the Clifford algebras of the euclidean spaces in order to calculate the kernel.

Mathematics Subject Classification: 15A66

Keywords: Clifford Algebras, Dirac operators, spinorial morphisms

Introduction

Pour le bénéfice de l'analyse harmonique, la simplicité de l'opérateur de Dirac classique D offre des techniques de calcul dans l'algèbre de Clifford. L'opérateur de Dirac est une généralisation de l'opérateur de Cauchy–Riemann permettant d'obtenir une généralisation des fonctions holomorphes via les spineurs harmoniques.

Dans cet article, nous étendons l'expression locale de D, grâce à la représentation spinorielle de cette algèbre de Clifford. D'une part, nous nous intéressons à la détermination des transformations linéaires préservant l'harmonicité spinorielle relativement à l'opérateur de Dirac, celles-ci formant le groupe conforme de l'espace quadratique euclidien. D'autre part, nous introduisons l'algèbre des polynômes à coefficients dans l'algèbre de Clifford de l'espace euclidien standard. Nous étudions le sous-espace des polynômes spineurs harmoniques liés à D, puis nous obtenons la décomposition de l'espace des polynômes homogènes de degré k à coefficients dans l'algèbre de Clifford (Théorème 3.2 et son corollaire). Ceci nous mène à l'étude de la représentation intégrale de l'opérateur D et à la détermination de son noyau K par le biais de la transformation de Fourier sur l'espace euclidien standard généralisée naturellement à l'algèbre de Clifford, ce qui permet de formuler le théorème de Cauchy à l'aide de celle-ci. Puis nous déduisons une relation entre les spineurs harmoniques liés à D et les harmoniques liés à l'opérateur de Laplace (Théorème 2.3).

1 L'opérateur de Dirac et ses propriétés

1.1 Variétés spinorielles et fibrés spinoriels

Soit (M, g) une variété riemannienne orientée de dimension n de fibré tangent $\pi\colon TM \to M$, et soit (U_α) un recouvrement de M qui trivialise le fibré tangent, avec la propriété que les fonctions de transitions $g_{\alpha\beta}$ sont dans $C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, \mathrm{SO}(n))$.

Soit

$$\sigma\colon \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n),$$

l'homomorphisme de revêtements à deux feuillets : Si les (U_α) sont convenablement choisis, alors nous pouvons relever les fonctions de transitions $g_{\alpha\beta}$ aux fonctions

$$\overline{g}_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Spin}(n)$$

telles que $\sigma(\overline{g}_{\alpha\beta}) = g_{\alpha\beta}$. Cependant, à cause des obstructions topologiques on ne peut avoir ce relèvement que si les deux premières classes de Whitney $w_1(M)$ et $w_2(M)$ du fibré tangent TM sont nulles :

$$\begin{cases} w_1(M) = 0 & \Leftrightarrow \quad M \text{ est une variété orientée,} \\ w_2(M) = 0 & \Leftrightarrow \quad \text{des spineurs sont globalement définis sur } M. \end{cases}$$

Si nous réalisons ces deux conditions, on dit que M est une variété spinorielle et nous obtenons un fibré spinoriel au-dessus de M dont la construction est la suivante. Soit $\mathrm{CL}(E, q)$ l'algèbre de Clifford d'un espace euclidien (E, q) de dimension n. La variété M est naturellement munie du fibré en algèbres de Clifford $\mathrm{CL}(M)$ dont la fibre en un point $x \in M$ est l'algèbre de Clifford $\mathrm{CL}(T_xM, g_x)$ de l'espace tangent. Le fibré $\mathrm{CL}(M)$ contient des fibrés de groupe structural spin (M). La construction d'un fibré spinoriel $\mathrm{S}(M)$ associé à

$\mathrm{CL}(M)$ comporte des difficultés; voir [1, 5, 13, 17, 3]. On ne peut donc pas manipuler de façon satisfaisante les sous-fibrés d'idéaux à gauche de $\mathrm{CL}(M)$. On se réfère alors à la construction classique des fibrés associés au fibré principal $\mathrm{S}(E)$ de groupe structural $Spin(E)$.

Les sections C^∞ de $\mathrm{CL}(M)$ et $\mathrm{S}(M)$ sont les champs d'éléments de Clifford ou des spineurs sur M et elles forment les algèbres $\Gamma\mathrm{CL}(M)$ et $\Gamma\mathrm{S}(M)$ respectivement. Nous avons la dérivation covariante riemannienne

$$\Gamma\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} TM^{\otimes k}\right) \xrightarrow{\nabla} \Gamma\left(T^*(M) \otimes \bigoplus_{k=0}^{\infty} TM^{\otimes k}\right),$$

sur M, pour laquelle le tenseur métrique est parallèle, c'est-à-dire qu'il satisfait $\nabla g = 0$. Donc ∇ passe au quotient et détermine une dérivation covariante des champs d'éléments de Clifford.

Cette dérivation covariante satisfait bien entendu la règle de Leibniz: si X est un champ de vecteurs sur M, $u \in \Gamma\mathrm{CL}(M)$ et $\varphi \in \Gamma\mathrm{S}(M)$, alors

$$\nabla_x(u \cdot \varphi) = (\nabla_x u)\varphi + u \cdot (\nabla_x \varphi).$$

L'algèbre $\Gamma\mathrm{CL}(M)$ opère à droite et à gauche sur $\Gamma\, T\,(M) \otimes \Gamma\,\mathrm{CL}(M)$ et si $u, v \in \Gamma\mathrm{CL}(M)$, nous avons

$$\nabla(uv) = (\nabla u) \cdot v + u \cdot \nabla v.$$

La connexion riemannienne sur le fibré principal $P(M)$ des repères orientés et orthonormés détermine canoniquement par relèvement une connexion sur le fibré principal $\overline{P(M)}$ de groupe structural $Spin(E)$ et par suite une dérivation covariante ∇ sur le fibré vectoriel associé

$$\mathrm{S}(M) = \overline{P(M)} \underset{\mathrm{Spin}(E)}{\times} \mathrm{S}(E).$$

Nous sommes maintenant en position de définir l'opérateur de Dirac D. Dénotons μ la multiplication de Clifford et utilisons la métrique riemannienne pour identifier TM et T^*M. Nous avons les compositions

$$\begin{cases} \Gamma\mathrm{CL}(M) \xrightarrow{\nabla} \Gamma \quad T(M) \otimes \Gamma\mathrm{CL}(M) \xrightarrow{\mu} \Gamma\mathrm{CL}(M), \\ \Gamma\mathrm{S}(M) \quad \xrightarrow{\nabla} \quad \Gamma\, T(M) \otimes \Gamma\mathrm{S}(M) \xrightarrow{\mu} \Gamma\mathrm{S}(M), \end{cases}$$

définissant l'opérateur de Dirac D sur les sections de $\mathrm{CL}(M)$ et $\mathrm{S}(M)$.

Définition 1.1. L'*opérateur de Dirac* sur la variété spinorielle (M, g) est $D = \mu \circ \nabla$.

Localement, un champ de vecteurs X s'écrit dans une base orthonormée $X = \sum_i X_i e_i$ d'où

$$\nabla_X u = \sum_i X_i \nabla_{e_i} u = \sum_i g(X, e_i) \nabla_{e_i} u$$

et donc

$$\nabla = \sum_i e_i \otimes \nabla_{e_i}.$$

Localement, dans une base orthonormée, l'opérateur de Dirac s'écrit alors

$$D = \sum_i e_i \nabla_{e_i},$$

que ce soit dans $\Gamma\mathrm{CL}(M)$ ou dans $\Gamma\mathrm{S}(M)$ (voir [8, 11, 12, 17]).

1.2 Extension de l'opérateur de Dirac sur l'espace euclidien

On doit prendre en ligne de compte dans la définition de l'opérateur de Dirac la représentation de $\mathrm{CL}(TM)$ sur l'espace des spineurs. Nous donnons dans cette section une extension de la définition classique de D sur l'espace quadratique (E, q).

Soit τ la représentation du groupe $\mathrm{Spin}(E)$ dans le $\mathrm{CL}(E)$-module $\Re$. Soit U un ouvert de E. La connexion riemannienne ∇ sur (U, q) se prolonge en une connexion linéaire

$$\begin{aligned} \nabla^\tau \colon C^\infty(U, TU) \times C^\infty(U, \Re) &\longrightarrow C^\infty(U, \Re) \\ (X, F) &\longmapsto \nabla^\tau_X(F). \end{aligned}$$

Décrivons en détail cette dérivation covariante. Il existe des éléments $\omega_1, \ldots, \omega_n$ de $C^\infty(U, \mathrm{Spin}(E))$ uniquement déterminés par la métrique q pour lesquels

$$\nabla^\tau_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(F) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + d\tau(\omega_i(x)) \right) \cdot F.$$

Voir [8, 17]. Posons

$$X = \sum_i a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Comme pour toute dérivation covariante, nous avons les propriétés suivantes:

(i) $\nabla^\tau_X = \sum_i a_i(x) \nabla^\tau_{\frac{\partial}{\partial x_i}}$;

(ii) $\nabla^\tau_{uX+vY}(F) = u\nabla^\tau_X(F) + v\nabla^\tau_Y(F)$;

(iii) $\nabla^\tau_X(uF) = (Xu)F + u\nabla^\tau_X(F)$.

Soit $q^{jk}(x)$ (resp. $\gamma^{ij}(x)$) la matrice de la forme bilinéaire symétrique, non dégénérée, associée à q^{-1} (resp. la matrice de la racine carrée de q^{-1}) dans la base $\frac{\partial}{\partial x_i}$ de T_xU. Ici pour $1 \leq i \leq n$,

$$e_i(x) = \sum_{j=1}^n q^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

satisfait à la condition de Clifford

$$e_j(x)e_k(x) + e_k(x)e_j(x) = -2q^{jk}(x).$$

Pour $i = 1, \ldots, n$, posons

$$E_i = \sum_{j=1}^n \gamma^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Par construction on a $q(E_i, E_j) = \delta_{ij}$. Définissons $\omega_{ij}^k \in C^\infty(U)$ par

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(E_j(x)) = \sum_k \omega_{ij}^k(x) E_k(x).$$

Comme ∇ est une connexion riemannienne, $\forall x \in U$, $\forall X, Y, Z \in C^\infty(U, T(U))$, nous avons

$$X q_x(Y, Z) = q_x(\nabla_X Y, Z) + q_x(Y, \nabla_X Z),$$

d'où

$$\omega_{ij}^k(x) + \omega_{ik}^j(x) = q_x(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} E_j, E_k) + q_x(E_j, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} E_k) = 0.$$

Ainsi, pour $i = 1, \ldots, n$, les matrices $(\omega_{ij}^k)_{j,k}$ sont antisymétriques. Les fonctions ω_i correspondentes sur U à valeurs dans $\mathrm{Spin}(E)$ sont définies par

$$\omega_i(x) = \frac{1}{2} \sum_{j<k} \omega_{ij}^k(x)\, e_j e_k = \frac{1}{4} \sum_{j,k} \omega_{ij}^k(x)\, e_j e_k.$$

Lemme 1.1. *L'opérateur de Dirac D sur $C^\infty(U, \Re)$ est défini localement sur (U, q) pour $x \in U$ par*

$$D = \sum_{i=1}^n e_i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \mathrm{d}\tau(\omega_i(x)) \right) = \sum_{i=1}^n e_i(x)\, \nabla^\tau_{\frac{\partial}{\partial x_i}}.$$

Proof. On a que D s'écrit

$$D = \sum_i E_i \nabla_{E_i} = \sum_i e_i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{4} \sum_{j,k} \omega_{ij}^k(x)\, d\tau(e_j e_k) \right) = \sum_i e_i(x) \left[\frac{\partial}{\partial x_i} + d\tau(\omega_i(x)) \right].$$

C'est la raison pour laquelle D prend cette forme particulière; voir [9, 13, 14, 15]. □

Posons

$$v_{ij}^k(x) = \sum_l \gamma^{il}(x) \omega_{lj}^k(x).$$

Proposition 1.1. *Nous avons* $\nabla_{E_i} E_j = \sum_k v_{ij}^k E_k$. *De plus, la fonction*

$$v_i(x) = \frac{1}{2} \sum_{j<k} v_{ij}^k(x)\, e_j e_k = \frac{1}{4} \sum_{j,k} v_{ij}^k(x)\, e_j e_k$$

est une fonction de classe C^∞ *sur* U *à valeurs dans* $\mathrm{Spin}(E)$, *Enfin l'opérateur de Dirac* D *sur* $C^\infty(U, \Re)$ *est défini localement par*

$$D = \sum_{i,j} \gamma^{ij}(x) e_j \nabla^\tau_{\frac{\partial}{\partial x_i}} = \sum_i e_i \nabla^\tau_{E_i}.$$

Plus précisément, pour $\omega_i(x)$ *et* $v_i(x)$ *donnés par la relation ci-dessus, nous avons*

$$D = \sum_{i,j} \gamma^{ij}(x) e_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + d\tau(\omega_j(x)) \right) = \sum_i e_i E_i(x) + d\tau(v_i(x)).$$

Proof. Il suffit tout d'abord de suivre la définition des E_i et on a

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_l \gamma^{il} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_l}} E_j = \sum_{k,l} \gamma^{il} \omega_{lj}^k E_k,$$

d'où le résultat. Comme $(E_j(x))$ est une base orthonormée de $T_x U$, cela implique $v_{ij}^k(x) + v_{ik}^j(x) = 0$ et donc $v_i \in C^\infty(U, \mathrm{Spin}(E))$. □

Théorème 1.1. (1) *L'opérateur de Dirac* D *est elliptique et auto-adjoint, c'est-à-dire*

$$\int_U (DF(x), G(x))_H \,\mathrm{d}\, x = \int_U (F(x), DG(x))_H \,\mathrm{d}\, x$$

pour tout $F, G \in C^\infty(U, H)$ *à support compact.*

(2) *Nous avons*

$$D^2 = -\sum_j \left[\nabla^\tau_{E_j} \nabla^\tau_{E_i} - \left(\sum_k v_{jj}^k \nabla^\tau_{E_k} \right) \right] + \sum_{i<j} E_i E_j \left[\nabla^\tau_{E_i} \nabla^\tau_{E_j} - \nabla^\tau_{E_j} \nabla^\tau_{E_i} - \nabla^\tau_{[E_i, E_j]} \right].$$

Proof. Voir [6, 10, 11, 12]. Le symbole principal de D^2 est le même que l'opérateur elliptique

$$\sum_{j,k} q^{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Alors D doit être elliptique. La propriété de l'auto-adjonction est une simple conséquence du théorème de Stokes :

$$\begin{aligned}
D^2 &= \sum_{i,j} E_i \nabla^\tau_{E_i} E_j \nabla^\tau_{E_j} \\
&= \sum_{i,j} E_i E_j \nabla^\tau_{E_i} \nabla^\tau_{E_j} + \sum_{i,j} E_i \left(\nabla_{E_i} E_j\right) \nabla^\tau_{E_j}. \\
&= \sum_{i,j} E_i E_j \nabla^\tau_{E_i} \nabla^\tau_{E_j} + \sum_{i,k} E_i E_k \left[\sum_j v^k_{ij}(x) \nabla^\tau_{E_j}\right] \\
&= \sum_{i,j} E_i E_j \nabla^\tau_{E_i} \nabla^\tau_{E_j} + \sum_{i,j} E_i E_j \left[\sum_k v^j_{ik}(x) \nabla^\tau_{E_k}\right] \\
&= \sum_{i,j} E_i E_j \left(\nabla^\tau_{E_i} \nabla^\tau_{E_j} - \left(\sum_k v^k_{ij}(x) \nabla^\tau_{E_k}\right)\right).
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que $v^k_{ij}(x) = -v^j_{ik}(x)$. On peut maintenant séparer la somme $\sum_{i,j}$ de la dernière ligne dans le calcul de D^2 en deux morceaux, un pour $i \neq j$ et l'autre pour $i = j$. Dans le premier cas, on obtient

$$\sum_{i<j} E_i E_j \left[\nabla^\tau_{E_i} \nabla^\tau_{E_j} - \nabla^\tau_{E_j} \nabla^\tau_{E_i} - \left(\sum_k (v^k_{ij}(x) - v^k_{ij}(x)) \nabla^\tau_{E_j}\right)\right].$$

De plus,

$$\sum_k (v^k_{ij}(x) - v^k_{ji}(x)) E_k = \nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i = [E_i, E_j].$$

Par suite, on a

$$\sum_k (v^k_{ij}(x) - v^k_{ji}(x)) \nabla^\tau_{E_k} = \nabla^\tau_{[E_i, E_j]}.$$

D'où la formule pour D^2. □

2 Les morphismes spinoriels dans l'algèbre de Clifford des espaces euclidiens

Nous voulons démontrer le résultat suivant.

Théorème 2.1. *Soit* $(\mathbb{R}^n, q)$ *muni de la forme quadratique* q*, où* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *forme une base de* $\mathbb{R}^n$ *vérifiant* $q(e_i) = 1$ *pour* $i = 1, \dots, n$*. Alors les homothéties, les translations, les symétries, et les rotations de* $\mathbb{R}^n$ *conservent l'harmonicité spinorielle relativement à l'opérateur de Dirac* D*, dans l'algèbre de Clifford. Ce sont des morphismes spinoriels.*

Proof. Les $e_\alpha = e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \dots e_{\alpha_p}$ pour $1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p < n$ forment une base de l'algèbre de Clifford $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n, q)$. Soit f un champ de Clifford de classe $C^k, k \geq 1$, tel que $Df = 0$. Soit

$$f = \sum_\alpha f_\alpha e_\alpha \quad \text{et} \quad D = \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un morphisme spinoriel. Si f est un spineur harmonique dans l'espace d'arrivée, alors $\Phi^* f$ est un spineur harmonique relativement à D dans l'espace de départ.

On suppose que Φ est de classe C^k, où $k \geq 1$. Soit

$$\Phi(x^1, x^2, \dots, x^n) = (\Phi^1(x^1, x^2, \dots, x^n), \dots, \Phi^n(x^1, \dots, x^n)).$$

Alors

$$(f \circ \Phi)_\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n) = f_\alpha(\Phi^1(x^1, \dots, x^n), \dots, \Phi^n(x^1, x^2, \dots, x^n)),$$

et

$$\frac{\partial (f \circ \Phi)_\alpha}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial y^j}(\Phi^1, \Phi^2, \dots, \Phi^n) \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}(x^1, x^2, \dots, x^n).$$

Donc

$$D(f \circ \Phi)(x^1, \dots, x^n) = \sum_{\substack{\alpha \in [[1, 2^n]] \\ 1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq n}} \frac{\partial f_\alpha}{\partial y^i}(\Phi^1, \Phi^2, \dots, \Phi^n) \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}(x^1, x^2, \dots, x^n) e_i e_\alpha.$$

(i) Soit $\Phi =$ l'homothétie de rapport λ. Alors

$$\Phi(x^1, x^2, \dots, x^n) = \lambda(x^1, x^2, \dots, x^n) = (\lambda x^1, \lambda x^2, \dots, \lambda x^n),$$

et

$$\Phi^j(x^1, x^2, \dots, x^n) = \lambda x^j.$$

Donc

$$\frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} = \lambda \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \begin{cases} \lambda & \text{si} \quad j = i, \\ 0 & \text{si} \quad j \neq i. \end{cases}$$

D'où

$$D(f\circ\Phi)(x^1,\ldots,x^n)=\lambda\sum_{\alpha,i,j}\frac{\partial f_\alpha}{\partial y^j}(\lambda x^1,\ldots,\lambda x^n)\delta_{ij}e_ie_\alpha=\lambda\, Df=0,$$

et nous avons le résultat.

(ii) Soit Φ est la translation de $\mathbb{R}^n$ du vecteur $a=\begin{pmatrix}a^1\\ \vdots\\ a^n\end{pmatrix}$. Alors

$$\Phi^j(x^1,x^2,\ldots,x^n)=x^j+a^j.$$

De plus,

$$\frac{\partial\Phi^j}{\partial x^i}(x^1,x^2,\ldots,x^n)=\frac{\partial x^j}{\partial x^i}=\begin{cases}1 & \text{si}\quad j=i,\\ 0 & \text{si}\quad j\neq i,\end{cases}$$

et

$$D(f\circ\Phi)=\sum_{\alpha,i,j}\frac{\partial f_\alpha}{\partial y^j}(a^1+x^1,\ldots,a^n+x^n)\delta_i^j e_ie_\alpha.$$

Enfin,

$$\sum_{\alpha,i}\frac{\partial f_\alpha}{\partial y^i}(a^1+x^1,\ldots,a^n+x^n)e_ie_\alpha=Df=0.$$

(iii) Soit $g\in O(n)$. On sait que g s'écrit comme produit de symétries orthogonales :

$$g=\sigma_{a_1}\sigma_{a_2}\ldots\sigma_{a_k}$$

où σ_{a_k} change le vecteur régulier a_j en $-a_j$. De plus, $\forall x\in\mathbb{R}^n$,

$$\sigma_{a_j}(x)=x-2\frac{(x|a_j)}{q(a_j)}a_j,$$

avec $(x|a_j)$ le produit scalaire associé à q; voir [5]. Or on peut écrire cette équation à l'aide de la multiplication de $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n,q)$ puisque $-2(x|a_j)=a_jx+xa_j$ et que $-\frac{a_j}{q(a_j)}=a_j^{-1}$, ce qui donne

$$\sigma_{a_j}(x)=x-(a_jx+xa_j)a_j^{-1}=-a_jxa_j^{-1}.$$

Donc g peut être représenté dans $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n,q)$ par l'application

$$g(x)=(-1)^k(a_1a_2\cdots a_k)x(a_1a_2\cdots a_k)^{-1},$$

qui s'étend de façon naturelle à l'algèbre de Clifford, surtout lorsque $g\in\mathrm{SO}(n)$. En présence d'un nombre pair de σ_{a_j}, nous avons

$$g(e_\alpha)=(a_1a_2\ldots a_{2k})e_\alpha(a_1a_2\ldots a_{2k})^{-1}$$

Pour $g \in O(n) \setminus SO(n)$,

$$ge_\alpha = -(a_1 a_2 \dots a_{2k+1}) e_\alpha (a_1 a_2 \dots a_{2k+1})^{-1}.$$

En travaillant comme plus tôt, on a $D(f \circ \Phi) = (Df) \circ \Phi = 0$; voir [7]. □

Remarque. Le théorème 2.1 n'est pas nouveau. Il résulte simplement du fait que D est défini en utilisant la métrique. Pour l'homothétie, c'est la formule de changement conforme qui est utilisée.

Théorème 2.2. *L'anti-involution principale τ de $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n, q)$ opère sur les champs de Clifford. De plus, les propriétés suivantes sont vérifiées:*

(i) *τ commute avec la restriction D_+ de D sur $\mathrm{CL}_+(\mathbb{R}^n, q)$, la sous-algèbre paire de $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n, q)$;*

(ii) *τ commute avec tout opérateur différentiel de type $X = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x^i}, a_i \in \mathbb{R}$;*

(iii) *D est invariant par la représentation σ du groupe spinoriel $\mathrm{Spin}(n)$, à savoir $\sigma(a) \cdot x = ax\tau(a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*

Proof. (i) Soit f un champ de Clifford sur $\mathbb{R}^n$. Alors

$$f(x^1, x^2, \dots, x^n) = \sum_\alpha f_\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n) e_\alpha.$$

Puisque

$$\tau f = \sum_\alpha f_\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n)(-1)^{\frac{|\alpha|(|\alpha|-1)}{2}} e_\alpha,$$

on a

$$\tau D_+ f = \sum_{\alpha,i} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^i}(-1)^{\frac{(|\alpha|+1)|\alpha|}{2}} e_\alpha$$

et

$$D_+ \tau f = \sum_{\alpha,i} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^i}(-1)^{\frac{|\alpha|(|\alpha|-1)}{2}} e_\alpha.$$

De plus, lorsque $|\alpha|$ est pair,

$$\frac{|\alpha|(|\alpha|-1)}{2} \equiv \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)}{2} \pmod 2.$$

Par suite $D_+\tau = \tau D_+$.

(ii) Il suffit de montrer que $\tau\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}(\tau f)$. Comme

$$\tau\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \sum_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^i}(-1)^{\frac{|\alpha|(|\alpha|-1)}{2}} e_\alpha \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x^i}(\tau f) = \sum_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^i}(-1)^{\frac{|\alpha|(|\alpha|-1)}{2}} e_\alpha,$$

nous avons $\tau X = X\tau$.

(iii) Si $a \in \mathrm{Spin}(n)$, alors $a \cdot \tau(a) = 1_{\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n,q)}$ et $a = a_1 a_2 \dots a_{2k}$ avec $q(a_i) = +1$, de sorte que nous avons $\sigma(a)D = D$ car $\sigma(a)e_j = ae_j\tau(a) = e_j$. □

Théorème 2.3. *Si*

$$f(x) = \sum_\alpha f_\alpha(x)e_\alpha$$

est une solution de $Df = 0$ dans $C^\infty(U, \mathrm{CL}(\mathbb{R}^n, q))$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et où chaque f_α est une fonction numérique sur U, alors $\Delta f_\alpha = 0$. Réciproquement, si φ est une champs de Clifford harmonique relativement au Laplacien Δ et

$$f = D\varphi = \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i},$$

alors $Df = D^2\varphi = \Delta\varphi = 0$.

Proof. Vu l'intime relation entre D et Δ, à savoir $D^2 = \Delta$, on a

$$D^2 f = \sum_\alpha (\Delta f_\alpha)e_\alpha = 0.$$

Or les e_α sont linérairement indépendants. Par suite, pour tout α, $\Delta f_\alpha = 0$. □

Exemple 2.1. On sait que

$$\varphi_n(x) = q(x)^{\frac{-(n-2)}{2}} = \|x\|^{-(n-2)}$$

est harmonique. Alors pour $n > 2$, $\Phi_n(x) = D\varphi_n(x) = \frac{x}{\|x\|^n}$, avec $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, est un spineur harmonique relativement à D. Ici

$$\begin{aligned} D\Phi_n(x) &= \sum_{1\le i,j\le n} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{x^j}{\|x\|^n}\right) e_i e_j \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\|x\|^2 - n(x^i)^2}{\|x\|^{n+2}} e_i^2 - \frac{n}{\|x\|^{n+2}} \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j (e_i e_j + e_j e_i) = 0\,. \end{aligned}$$

On a utilisé la fait que $e_i e_j + e_j e_i = 0$ pour $i \neq j$.

Exemple 2.2. Prenons $E = (\mathbb{R}^2, q)$ avec $q(x) = -(x^1)^2 - (x^2)^2$ et considérons l'algèbre de Clifford $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^2, q) \equiv M_2(\mathbb{R})$. L'espace des spineurs est $\mathrm{S}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ sur lequel $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^2, q)$ agit via

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$e_1 e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

s'identifie à $i = \sqrt{-1}$ et $D = e_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x^2}$ opère sur un champ des spineurs S de composantes u et v via

$$DS = \begin{pmatrix} \frac{-\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\partial u}{\partial x^1} + \frac{\partial v}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x^1} \end{pmatrix}.$$

L'opérateur D est donc l'opérateur de Cauchy–Riemann et les spineurs harmoniques ($D\,S = 0$) sont les fonctions analytiques $u + iv$. Alors $S = u + iv$ est analytique si et seulement si $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}$ et $v = \frac{\partial \Phi}{\partial x^1}$ de sorte que Φ fonction harmonique relativement au Laplacien $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Exemple 2.3. $\Phi(x, y) = \mathrm{Log}\sqrt{x^2 + y^2}$ est harmonique relativement à Δ et

$$S(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} e_1 + \frac{y}{x^2 + y^2} e_2$$

est un spineur harmonique relativement à D. Ici D opère sur un champ de vecteurs $X = ae_1 + be_2$ via

$$\begin{aligned} DX &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} & -\left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial x} \end{pmatrix} \\ &= (\mathrm{div}\, X) I_2 + (\mathrm{rot}\, X) e_1 e_2. \end{aligned}$$

De plus,

$$DX = 0_{\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)} \Longleftrightarrow [\mathrm{div}\, X = 0 \text{ et } \mathrm{rot}\, X = 0].$$

3 L'espace des polynômes à coefficients dans l'algèbre de Clifford

On définit sur l'espace vectoriel $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)$ une forme quadratique extension de celle de $\mathbb{R}^n$: pour tout $u \in \mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)$,

$$q(u) = 2^{-n}\,\mathrm{Tr}[l(u)l(u)^\tau] = 2^{-n}\,\mathrm{Tr}[l(u)^\tau l(u)],$$

où $l(u)$ est la translation à gauche par u et la tranposée est effectuée dans la base e_α de $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)$. Les e_α forment une base orthonormée de $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)$ et q est euclidienne. Nous notons par $(.|.)_{\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)}$ le produit scalaire sur $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)$ associé à q.

Construisons l'algèbre $\mathbf{P}$ des polynômes en n variables à coefficients dans l'algèbre de Clifford $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)$: pour $i = 1, \ldots, n$,

$$\mathbf{P} = \mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n] \supset \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n] \supset \ldots \supset \mathbb{R}[x_i].$$

Soit $p(x) = \sum\limits_\alpha a_\alpha x^\alpha \in \mathbf{P}$ avec

$$a_\alpha \in \mathrm{CL}(\mathbb{R}^n), \quad x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \quad \text{et} \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Pour $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, nous avons

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

De plus,

$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!, \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial}{\partial_x}\right)^\alpha = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{\alpha_i}.$$

Le produit et l'addition de deux polynômes de $\mathbf{P}$ sont définis de façon naturelle, grâce à la structure algébrique de $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)$. Le centre $Z_{\mathbf{P}}$ de $\mathbf{P}$ est l'algèbre des polynômes en n variables à coefficients dans $Z_{\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)}$, le centre de l'algèbre de Clifford $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)$ qui dépend de la parité de n :

(i) Si n est pair, $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre centrale simple : $Z_{\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)} = \mathbb{R}_{\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)}$ et par suite le centre de $\mathbf{P}$ est isomorphe à $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$; voir [2, 4, 5].

(ii) Si n est impair, le centre de $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)$ est de dimension 2 sur $\mathbb{R}$: $Z_{\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)} = \mathbb{R}_{\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)} \bigoplus \mathbb{R}J$ avec $J = e_1 e_2 \ldots e_n$ qui est isomorphe à $\mathbb{C}$ lorsque

$$J^2 = (-1)^{n(n-1)/2} q(e_1) q(e_2) \ldots q(e_n) = -1,$$

c'est-à-dire lorsque $n \equiv 3 \pmod 4$, de sorte que le centre de $\mathbf{P}$ est isomorphe à $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Définissons un produit scalaire euclidien sur $\mathbf{P}$, déterminé à partir de celui de $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)$, en posant pour $p, r \in \mathbf{P}$,

$$(p|r)_{\mathbf{P}} = \sum_{\alpha} (a_\alpha|b_\alpha)_{\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)}.$$

Le groupe de Clifford $\Gamma(\mathbb{R}^n, q)$ de l'espace quadratique $(\mathbb{R}^n, q)$ est le groupe que forment (via la multiplication) les éléments de l'algèbre de Clifford $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)$ qui sont produits de vecteurs non-isotropes de $\mathbb{R}^n$. Une représentation naturelle σ du groupe de Clifford $\Gamma(\mathbb{R}^n, q)$ sur $\mathbf{P}$ est définie, pour $p \in \mathbf{P}$ et $g \in \Gamma(\mathbb{R}^n, q)$, par

$$\sigma(g)p(x) = p(gx\tau(g)).$$

Enfin, désignons par $\mathbf{P}_k$ l'espace des polynômes homogènes de degré k à coefficients dans $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 3.1. *$\mathbf{P}_k$ est un sous-espace invariant par la représentation σ.*

Proof. Alors pour $g \in \Gamma(\mathbb{R}^n, q)$, avec $g = a_1\, a_2 \ldots a_m$ où $q(a_i) \neq 0$ pour tout i, et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\sigma(g)x = gx\tau(g) = (a_1 a_2 \ldots a_m)x\tau(a_1 a_2 \ldots a_m) = (a_1 a_2 \ldots a_m)x(a_m \ldots a_1).$$

Cette action est linéaire en x, donc préserve le degré du polynôme. On en déduit que P_k est un sous-espace de P invariant par σ. □

Lemme 3.2. *Pour tout $p \in \mathbf{P}_k$, $Dp \in \mathbf{P}_{k-1}$.*

Lemme 3.3. *La restriction de la représentation σ aux sous-groupes*

$$\mathrm{Pin}(\mathbb{R}^n, q) = \{g \in \Gamma(\mathbb{R}^n, q) | g^\tau g = 1\}$$

du groupe de Clifford (en particulier du groupe $\mathrm{spin}(\mathbb{R}^n, q)$) est unitaire. C'est-à-dire que soit $p, r \in \mathbf{P}$ et $g \in \mathrm{Pin}(\mathbb{R}^n, q)$ où $g = a_1, a_2 \ldots a_m$, alors

$$(\sigma(g)p|\sigma(g)r)_{\mathbf{P}} = (p|r)_{\mathbf{P}}.$$

Nous remarquons que suivant la parité de n, l'espace H_k des polynômes homogènes de degré k, en n variables, à coefficients dans $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$, harmoniques relativement au Laplacien Δ, est inclus dans le centre $Z_{\mathbf{P}}$. Si f est un champ de Clifford défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes f_α, sont des éléments de H_k, alors Df est un spineur harmonique relativement à D.

Théorème 3.1. *Les propriétés suivantes sont vraies :*

(i) $D(H_k) \subset \mathrm{Ker} D$.

(ii) $D(H_k)$ *est un sous-espace invariant par représentation* σ *du groupe de Clifford* $\Gamma(\mathbb{R}^n, q)$.

(iii) $\mathbf{P}_k$ *est isomorphe à*

$$\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n) \bigotimes \pi_k[x_1, \dots, x_n]$$

où $\pi_k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ *est l'espace des polynômes homogènes à coefficients dans* $\mathbb{R}$, *de degré* k, *à* n *variables.*

(iv) *On étend l'involution* π *et l'anti-involution principale* τ *de* $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)$ *à l'algèbre* $\mathbf{P}$. *Elles conservent l'homogénéité des polynômes.*

Proof. Les trois premiers énoncés sont triviaux. Il suffit de démontrer (iv). On note par le même symbole les extensions des involutions et des anti-involutions principales π, τ et $v = \pi \circ \tau = \tau \circ \pi$ de $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)$ à l'algèbre des polynômes $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)[x_1, x_2, \dots, x_n]$: pour $p(x) = \sum\limits_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha$ avec $a_\alpha \in \mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)$, en particulier, $a_\alpha \in \mathrm{CL}_k(\mathbb{R}^n)$ et

$$\begin{cases} \pi(p)(x) = \sum\limits_\alpha \pi(a_\alpha) x^\alpha = \sum\limits_\alpha (-1)^{|\alpha|} a_\alpha x^\alpha, \\ \tau(p)(x) = \sum\limits_\alpha \tau(a_\alpha) x^\alpha = \sum\limits_\alpha (-1)^{\frac{1}{2}|\alpha|(|\alpha|+1)} x^\alpha. \end{cases}$$

Les autres propriétés de π, τ, v se déduisent facilement. □

Corollaire 3.1. *En tant qu'espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$, $\mathbf{P_k}$ *admet une base orthonormée*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha!}} e_I \bigotimes x^\alpha \right)_{I, |\alpha|=k}$$

où

$$I \in \{(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, n\}^p : i_1 < i_2 < \cdots < i_p\} \ \text{ et } \ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| = k.$$

Proof. Le produit scalaire sur $\mathbf{P}$ est en fait le produit des deux produits scalaires des deux espaces $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ et $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)$: pour $a_\alpha, b_\alpha \in \mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)$, $p, q \in \mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)[x_1, \dots, x_n]$,

$$\langle p, q \rangle = p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(q)(x)|_{x=0} \quad \text{et} \quad (a_\alpha \mid b_\beta)_{\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)} = 2^{-n-1} \mathrm{Tr}[l(a_\alpha) l(b_\alpha)^\tau + l(b_\alpha) l(a_\alpha)^\tau)].$$

□

Lemme 3.4. *Soit f un champ de Clifford défini sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)$ de classe C^1, positivement homogène de degré k. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$D(xf) = -nf - xDf - 2\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Proof. Soit

$$f(x) = \sum_\alpha f_\alpha(x) e_\alpha, \qquad xf(x) = \sum_{j,\alpha} x_j f_\alpha(x) e_j e_\alpha, \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j f_\alpha) = \delta_i^j f_\alpha + x_j \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}.$$

Alors nous avons

$$\begin{aligned} D(xf) &= \textstyle\sum_i e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j,\alpha} x_j f_\alpha(x) e_j e_\alpha \;=\; \displaystyle\sum_{i,j,\alpha} e_i e_j \frac{\partial (x_j f_\alpha(x))}{\partial x_i} e_\alpha \\ &= \sum_{i,j,\alpha} e_i e_j \big(\delta_i^j f_\alpha + x_j \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\big) e_\alpha \;=\; \sum_{i,\alpha} e_i^2 f_\alpha e_\alpha + \sum_{i,j,\alpha} e_i e_j x_j \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} e_\alpha \\ &= -nf + \sum_{i,j,\alpha} (-e_j e_i - 2\delta_i^j) x_j \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} e_\alpha \;=\; -nf - xDf - 2\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.5. *L'application ψ de $\mathbf{P_k}$ dans lui-même via $f \mapsto D(xf)$ est un automorphisme linéaire qui applique en eux-mêmes $x\,\mathbf{P_{k-1}}$ et l'espace $\tilde{H}_k =$ $\ker D$ des polynômes spineurs harmoniques relativement à D.*

Proof. Prenons tout d'abord un élément $xf \in x\,\mathbf{P_{k-1}}$. On a alors

$$\begin{aligned} \psi(xf) = D(x^2 f) &= -nxf - xD(xf) - 2\sum_i x_i \frac{\partial(xf)}{\partial x_i} \;=\; -nxf - xD(xf) - 2xf - 2\sum_i x_i x \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= -(2+n)xf - xD(xf) - 2x\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \;=\; x\left(-(2+n)f - D(xf) - 2\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right). \end{aligned}$$

Prenons maintenant un élément $f \in \tilde{H}_k$. On a alors

$$\begin{aligned} D(\psi(f)) &= D(D(xf)) \;=\; D\Big(-nf - xDf - 2\textstyle\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) \\ &= -2\textstyle\sum_i D\Big(x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) \;=\; -2Df - 2\sum_i x_i D(\frac{\partial f}{\partial x_i}) \;=\; 0. \end{aligned}$$

□

Théorème 3.2. *Le sous-espace vectoriel $x\,\mathbf{P}_{k-1}$ et le sous-espace $\tilde{H}_k =$ $\mathrm{Ker} D$ des polynômes spineurs harmoniques, relativement à l'opérateur de Dirac D, sont appliqués en eux-mêmes par les opérations du groupe $\mathrm{Spin}(n)$ via la représentation σ.*

4 Représentation intégrale de l'opérateur de Dirac classique

Nous voulons résoudre l'équation $Du(x) = \int\limits_{\Omega} K(x,y)u(y)dy$, où D est l'opérateur de Dirac classique qui, dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, q)$, a pour expression :

$$D = \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \; = \; \sum_{|\alpha|=1} e_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha},$$

où

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \; = \; \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Voir [1, 6]. Ce travail se fait sur l'espace des champs continûment différentiables définis sur un produit $\Omega = \prod_{j=1}^{n} \Omega_j$ d'ouverts de $\mathbb{R}$ qui sont à valeurs dans un module de l'algèbre de Clifford $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)$ et qui sont à support compact.

Le problème revient à déterminer le noyau K_D de l'opérateur D de Dirac. Nous utilisons comme moyen de calcul la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^n$ qui peut être généralisée sur l'algèbre de Clifford et par conséquent sur l'espace des spineurs puisque la transformation de Fourier de chaque composante existe pour un tel champ de vecteurs.

Le symbole principal de D pour $x \in \Omega$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$ est

$$\sigma_D(x,\xi) = i \sum_{|\alpha|=1} e_\alpha (\xi)^{\alpha}.$$

Alors on a $\sigma_D(x,\xi) = i\xi$. Voir [1, 6]. Vu l'intime relation entre le Laplacien Δ et D ($\Delta = D^2$), on a $\sigma_\Delta(x,\xi) = -\xi^2 = q(\xi) \cdot \mathrm{Id}_{\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n)}$ (égalité dans l'algèbre de Clifford), où Id est l'application identité. Alors

$$Du(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\xi)\hat{u}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi = \int\limits_{\Omega} \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sigma_D(x,\xi) e^{i\langle \xi, x-y\rangle} d\xi \right] u(y)dy.$$

On pose

$$K_D(x,y) \; = \; \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sigma_D(x,\xi) e^{i\langle x-y,\xi\rangle} d\xi \; = \; \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi e^{i\langle x-y,\xi\rangle} d\xi \; = \; \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_j e^{i\langle x-y,\xi\rangle} d\xi \right) e_j \, .$$

Pour $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, on pose $\underline{x}_j=(x_1,\dots,\widehat{x}_j,\dots,x_n)$. On a

$$\begin{aligned}K_D(x,y) &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int\limits_{\underline{\mathbb{R}^n}_j} e^{-i\langle \underline{y}_j-\underline{x}_j,\underline{\xi}_j\rangle}d\xi\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}_j}\xi_j e^{-i(y_j-x_j)\xi_j}d\xi_j\right)e_j\\ &= \sum_{j=1}^{n}\widehat{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_j}}(y_j-x_j)\widehat{I_{\underline{\mathbb{R}^n}_j}}(\underline{y}_j-\underline{x}_j)e_j\end{aligned}$$

avec $\widehat{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_j}}$ et $\widehat{I_{\underline{\mathbb{R}^n}_j}}$ les transformées de Fourier de la fonction identité $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_j}$ sur la j-ième copie $\mathbb{R}_j$ et de la fonction unité $I_{\underline{\mathbb{R}^n}_j}$ de $\underline{\mathbb{R}^n}_j$. Alors, on obtient pour $x,y\in\Omega$ une formule (voir [16]), à savoir

$$K_D(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\widehat{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_j}}(x_j-y_j)\cdot\widehat{I_{\underline{\mathbb{R}^n}_j}}(\underline{x}_j-\underline{y}_j)e_j.$$

D'autre part, pour tout $x,y\in\Omega$ le noyau de l'opérateur de Laplace classique Δ est

$$\begin{aligned}K_\Delta(x,y) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sigma_\Delta(x,\xi)e^{i\langle x-y,\xi\rangle}d\xi\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}q(\xi)e^{i\langle x-y,\xi\rangle}d\xi=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_y\, e^{i\langle x-y,\xi\rangle}d\xi\\ &= \Delta_y\left[\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{i\langle x-y,\xi\rangle}d\xi\right]=\Delta_y\left[\widehat{I_{\mathbb{R}^n}}(x-y)\right].\end{aligned}$$

Maitenant, on peut formuler le théorème de Cauchy à l'aide des algèbres de Clifford puisque les relations de $D\varphi=0$ généralisent les fonctions holomorphes.

Théorème 4.1 (Formule intégrale de Cauchy). *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe Ω de $\mathbb{R}^2$ et γ une courbe simple fermée de classe C^1, continue à l'intérieur de Ω et a un point à l'intérieur de γ. Si $Df=0$, alors*

$$2\pi e_1e_2f(a)=\int\limits_{\gamma}\frac{f(z)}{z-a}dz.$$

References

[1] J. Block and J. Fox, Asymptotic pseudodifferential operators and index theory, In *Geometric and topological invariants of elliptic operators (Brunswick, ME, 1988)*, volume 105 of *Contemp. Math.*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1–32, 1990.

[2] W. M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, volume **120** of *Pure and Applied Mathematics*, Academic Press Inc., Orlando, FL, second edition, 1986.

[3] A. W. Chou, The Dirac operator on spaces with conical singularities and positive scalar curvatures, *Trans. Amer. Math. Soc.* **289(1)**, 1–40, 1985.

[4] R. Deheuvels, *Formes quadratiques et groupes classiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1981. Mathématiques. [Mathematics].

[5] R. Deheuvels, *Tenseurs et spineurs*, Mathématiques, [Mathematics], Presses Universitaires de France, Paris, 1993.

[6] J.-P. Demailly, Théorie de Hodge L^2 et théorèmes d'annulation, In *Introduction à la théorie de Hodge*, volume **3** of *Panor. Synthèses*, Soc. Math. France, Paris, 3–111, 1996.

[7] B. Fuglede, Harmonic morphisms between semi-Riemannian manifolds, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **21(1)**, 31–50, 1996.

[8] M. Gromov and H. B. Lawson Jr, Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **(58)**, 83–196 (1984), 1983.

[9] N. Hitchin, Harmonic spinors, *Advances in Math.* **14**, 1–55, 1974.

[10] Y. Kosmann, Dérivées de Lie des spineurs, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, **91**, 317–395, 1972.

[11] A. Lichnerowicz, Laplacien sur une variété riemannienne et spineurs, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8)*, **33**, 187–191, 1962.

[12] A. Lichnerowicz, Spineurs harmoniques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **257**, 7–9, 1963.

[13] J. Milnor, Spin structures on manifolds, *Enseignement Math. (2)*, **9**, 198–203, 1963.

[14] J. W. Milnor, Remarks concerning spin manifolds, In *Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse)*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 55–62, 1965.

[15] G. Moisil and N. Théodorescu, Fonctions holomorphes dans l'espace, *Mathematica* **5**, 1931.

[16] C. Müller, *Analysis of spherical symmetries in Euclidean spaces*, volume **129** of *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[17] C. Nash, *Differential topology and quantum field theory*, Academic Press Ltd., London, 1991.

Received: August, 2009